ベルヌーイの効用指標 - 選択理論の最近における発展(1) -

鎌倉, 昇

經濟論叢

第九十六巻　第六號

昭和四十年十二月

京都大學經濟學會

ベルヌーイの効用指標

——選択理論の最近における発展 (1) ——

鎌 倉 昇

本稿は選択理論の最近における発展を概観しようとするものであり，京都大学大学院における，昭和38年以来3カ年連続の講義「数理経済学特講」が基礎になったものである。

序 問題の提起

0.1. 伝統的な選択の理論

伝統的な選択の理論においては，経済主体の選択の対象が確定的であり，また，選択行為の帰結も確定的であると仮定されている。まずそのような選択理論の典型的なものとしてヒックスの消費者選択の理論を考えて見よう。いまある消費者が一定の貨幣額をもって市場にあらわれたとする。慣例にしたがって，この貨幣額をMであらわすとしよう。消費者は市場に存在するn個の商品x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$を自由に買い得るものとし，そのn個の商品の価格は市場ですでにきまっているものとする。便宜上それらの商品価格を$p_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$で示すことにする。消費者はあるきまった選択のパターンをもっているものとし，それがいわゆる無差別図表(indifference map) あるいは効用指数函数であらわされるとする。記号的には，この効用指数函数は，$u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$と書かれる。そこで問題は，このような状況のもとで，どのような選択の仕方がこの消費者に最大の満足を与えるか，という形で提起される。周知のごとく，この問題は$M=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$という制約条件のもとで$u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を極大にするという，条件付き極大の問題として解かれる。「限界代用率が価格比に等しくなるように選択を行えばよい」というのがその答であり，記号的には

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}}=\frac{p_i}{p_j} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

という形であらわされる。

生産者選択の理論は，多少問題の設定がことなるが，しょせん基本的な考え方は同じであり，ここでは繰返して述べないこととする。けだし，私の意図は，伝統的な選択の理論そのものの立入った解説にあるのではなく，むしろ以下に論ずる問題の性質を明らかにするための引合いに出すにすぎないからである。

0.2.　賭けと保険の場合

このような伝統的な選択理論をまず賭けの場合と比較してみよう。いま銅貨を投げて，表が出れば 1,000 円もらい，裏が出れば相手に 500 円支払うという賭けを考えてみる。銅貨には全く歪みがなく，表の出る確率も，裏の出る確率も，ともに 2 分の 1 であるとする。いまある個人が，この賭を受入れたとすると，それは，2 分の 1 の確率で 1,000 円を得，2 分の 1 の確率で 500 円を失うというような確率変数 (random variable) を受入れたことになる。

こう見て来ると，この銅貨投げの賭けと前述の消費者選択の場合に，極めてはっきりとした相違のあることは否定出来ない。

もう一つの例として，定期保険もしくは期間保険 (time insurance) とよばれる型の保険を考えて見よう。たとえば生命保険としよう。一定期間（たとえば10年）の間に，もし被保険者が死ねば一定の保険金を相続人が受取るが，かりに10年以内に被保険者が死なぬときには保険料だけかけ損になるとしよう。いまこの保険に加入したとする。10年間のうちに死なず，保険料は払うが，保険金を受取れぬ状況を E_1 で示し，E_1 の起る確率を p とする。10年間のうちに死亡し，保険料は最初に支払ってあり，後に保険金を相続人が受取る状況を E_2 としよう。E_2 の起る確率は $1-p$ である。つぎに保険に加入せぬ場合，10年以内に死ぬよう事態を F_1 で示し，10年以内に死なぬ事態を F_2 で示そう。いうま

でもなく，F_1 の起る確率は p，F_2 の起る確率は $1-p$ である。こう見て来ると，保険に加入することは E_1 に p，E_2 に $1-p$ の確率を賦与した確率分布を選択することになるし，保険に加入しないとすれば，それは F_1 に p，F_2 に $1-p$ の確率を賦与した確率分布を選択したことになる。

0.3. 不確定要素をふくむ選択

上に示した銅貨投げの賭けや保険の例は，われわれが日常直面する不確定要素を含む選択の，ほんの一二の例にすぎない。よく引き合いに出されるのは，大西洋航行中のコロンブスの場合と，シャーロック・ホームズを追跡するモリアーティー教授の場合である。

まずコロンブスの場合はこうである。船員たちは航海の中止をコロンブスに迫り，死をもって脅迫した。陸地が近いか遠いか，コロンブスにはわからない。もし航海を中止して引返したとしよう。陸地が遠ければ生命は助かるが，陸地が近ければ後日後悔の原因になるであろう。かりに航海を続行したとする。この場合，陸が近ければ栄光と満足が得られるが，陸が遠ければ死が待っている。コロンブスの直面した問題は，陸が遠いか近いかという予想しがたい問題をふくんだ選択であった。

つぎにモリアーティー教授の場合に移ろう。シャーロック・ホームズはいかなる犠牲を払ってもモリアーティー教授に出会わぬように努めている。ホームズの狙いはドーヴァー経由で，ロンドンからヨーロッパ大陸への脱出を意図しているわけである。ロンドンで汽車に乗るとき，ホームズはモリアーティーを駅で見かけたし，モリアーティーもまたホームズを見かけた。汽車はすでに発車してしまった。ホームズの採り得るみちは，ドーヴァーまで汽車に乗って行くか，唯一の中間停車駅カンタベリーで下車するかのいずれかである。モリアーティーはロンドンから自動車でホームズを追跡している。ホームズの選択は，予想しがたいモリアーティーの行動を念頭において，いずれの駅で下車するのが有利かということである。

$$-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}}=\frac{p_i}{p_j}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

という形であらわされる。

生産者選択の理論は，多少問題の設定がことなるが，しょせん基本的な考え方は同じであり，ここでは繰返して述べないこととする。けだし，私の意図は，伝統的な選択の理論そのものの立入った解説にあるのではなく，むしろ以下に論ずる問題の性質を明らかにするための引合いに出すにすぎないからである。

0.2.　賭けと保険の場合

このような伝統的な選択理論をまず賭けの場合と比較してみよう。いま銅貨を投げて，表が出れば 1,000 円もらい，裏が出れば相手に 500 円支払うという賭けを考えてみる。銅貨には全く歪みがなく，表の出る確率も，裏の出る確率も，ともに 2 分の 1 であるとする。いまある個人が，この賭を受入れたとすると，それは，2 分の 1 の確率で 1,000 円を得，2 分の 1 の確率で 500 円を失うというような確率変数 (random variable) を受入れたことになる。

こう見て来ると，この銅貨投げの賭けと前述の消費者選択の場合に，極めてはっきりとした相違のあることは否定出来ない。

もう一つの例として，定期保険もしくは期間保険 (time insurance) とよばれる型の保険を考えて見よう。たとえば生命保険としよう。一定期間（たとえば10年）の間に，もし被保険者が死ねば一定の保険金を相続人が受取るが，かりに10年以内に被保険者が死なぬときには保険料だけかけ損になるとしよう。いまこの保険に加入したとする。10年間のうちに死なず，保険料は払うが，保険金を受取れぬ状況を E_1 で示し，E_1 の起る確率を p とする。10年間のうちに死亡し，保険料は最初に支払ってあり，後に保険金を相続人が受取る状況を E_2 としよう。E_2 の起る確率は $1-p$ である。つぎに保険に加入せぬ場合，10年以内に死ぬよう事態を F_1 で示し，10年以内に死なぬ事態を F_2 で示そう。いうま

でもなく，F_1 の起る確率は p，F_2 の起る確率は $1-p$ である。こう見て来ると，保険に加入することは E_1 に p，E_2 に $1-p$ の確率を賦与した確率分布を選択することになるし，保険に加入しないとすれば，それは F_1 に p，F_2 に $1-p$ の確率を賦与した確率分布を選択したことになる。

0.3. 不確定要素をふくむ選択

上に示した銅貨投げの賭けや保険の例は，われわれが日常直面する不確定要素を含む選択の，ほんの一二の例にすぎない。よく引き合いに出されるのは，大西洋航行中のコロンブスの場合と，シャーロック・ホームズを追跡するモリアーティー教授の場合である。

まずコロンブスの場合はこうである。船員たちは航海の中止をコロンブスに迫り，死をもって脅迫した。陸地が近いか遠いか，コロンブスにはわからない。もし航海を中止して引返したとしよう。陸地が遠ければ生命は助かるが，陸地が近ければ後日後悔の原因になるであろう。かりに航海を続行したとする。この場合，陸が近ければ栄光と満足が得られるが，陸が遠ければ死が待っている。コロンブスの直面した問題は，陸が遠いか近いかという予想しがたい問題をふくんだ選択であった。

つぎにモリアーティー教授の場合に移ろう。シャーロック・ホームズはいかなる犠牲を払ってもモリアーティー教授に出会わぬように努めている。ホームズの狙いはドーヴァー経由で，ロンドンからヨーロッパ大陸への脱出を意図しているわけである。ロンドンで汽車に乗るとき，ホームズはモリアーティーを駅で見かけたし，モリアーティーもまたホームズを見かけた。汽車はすでに発車してしまった。ホームズの採り得るみちは，ドーヴァーまで汽車に乗って行くか，唯一の中間停車駅カンタベリーで下車するかのいずれかである。モリアーティーはロンドンから自動車でホームズを追跡している。ホームズの選択は，予想しがたいモリアーティーの行動を念頭において，いずれの駅で下車するのが有利かということである。

さてこのような二つの場合は，先に掲げた銅貨投げの賭けや保険加入の場合と，かなり重要な相違がある。まず第一に，コロンブスの場合も，ホームズの場合も，いずれも，金銭的な問題ではないという点である。第二に，コロンブスにとって，陸地が近いか遠いかは通常の意味で確率を考え得ぬ事であり，また同様に，ホームズにとって，モリアーティーがカンタベリーで待伏せている確率ないし，ドーヴァーで待伏せている確率ということは，具体的に意味のある事柄とは言いがたい。

このように，われわれが不確定要素をふくむ選択という場合，問題の内容はきわめて広汎であり，かつ複雑である。コロンブスやホームズの例は，問題の性質がわれわれの日常のくらしから離れた異常な場合にかかわるという印象を与えたかも知れない。しかし，朝，出勤に際して曇った空を見上げて，傘をもって行った方がよいかどうかを考えるとき，すでに，コロンブスやホームズの場合ほど深刻で重大ではないが，その性質において全く同じ種類の問題に直面しているのである。月給日に一と月の予算を立てたり，また会社の経営者が事業の計画を立てたりするとき，常にわれわれはこの種類の問題を経験しているのである。本稿の課題は，このように複雑かつ多岐な性質をもつ問題に，いま少し立入って，その性質を明らかにするとともに，それの解決のための種々の試みを，能うかぎり組織的に論じてみたい，という点にある。

I　ベルヌーイの効用指標

1.1.　数学的期望値による古典的な取扱い方

確率論が一応の形を整備したのは17世紀でパスカルやフェルマーが確率論の確立に重要な役割を果したといわれている。この当時の確率論学者の間にほぼ共通な考え方として，さきの銅貨投げの場合や保険加入の問題は，数学的期望値 (mathematical expectation) の比較として解けばよい，という見方があった。たとえば銅貨投げの例についていえば，表に賭けた場合の数学的期望値は 1,000 円$\times\frac{1}{2}+$ 0 円$\times\frac{1}{2}=$500 円であり，裏に賭けた場合の数学的期望値は

500円×$\frac{1}{2}$＋0円×$\frac{1}{2}$＝250円であるから，表に賭ける方が有利である。言いかえれば，人が合理的に行動するかぎり，このような状況の下では表にかけるはずだ，というのが，この当時の確率論学者が，あるいは陽表的にあるいは陰伏的にもった考え方である。生命保険の場合もまったく同様に考えることが出来る。もし保険に加入すれば $pE_1+(1-p)E_2$，保険に加入しなければ $pF_1+(1-p)F_2$ がそれぞれの数学的期望値であり，両者の比較で保険に加入する方がよいかどうかがきまるというのである。

このような数学的期望値による考え方には二つの点で不充分な面がある。第一に，選択の対象が数学的に計算出来ないような場合を考慮に入れることが出来ない。たとえば上の保険の場合にしても，単に金額の計算だけでなく他の要素をも考慮に入れねばならない。相続人に多くの保険金が渡ることのよろこびよりも，自分の手許の現金がたとえわずかでも保険料として支払われる額が減少することを惜しむという態度の人があれば，このような人は上述の数学的期望値の比較という図式では捉え得ないことになる。第二に，たとえ金額を取扱う場合にでもやはり心理的なものの入込むことは否定出来ない。たとえば銅貨投げの賭けの場合，人によっては，失う500円に，得る1,000円よりもはるかに大きいウエイトをおくことがあり得る。500円を失うことは自分の財産状態の現状以下への低下である。1,000円を得ることは喜びにちがいないが，500円を失うかも知れぬという心配と較べれば，1,000円を得るかも知れぬという楽しみは取るに足らぬことであり，数学的期望値の比較如何にかかわらず，賭けに参加しないことは充分考え得る。

いうまでもなく，コロンブスやホームズの例のようにただちに確率を考え得ない場合はこの数学的期望値の方法で解き得ない。しかしこの確率の問題は後に詳しく論ずる機会があるから，いまここでは立入らないことにする。

1.2. セント・ペテルスブルグのゲーム

数学的期望値による取扱い方に対して，いわば効用にあたる概念を導入して

問題の解決を試みたのはダニエル・ベルヌーイである。彼のいわゆる道徳的期望値 (moral expectation) の概念がこれである。彼がこの概念を導入する機縁となったのはセント・ペテルスブルグのゲームといわれるパラドックスである。

いま歪のない銅貨を何回か投げて，これが表になるまで試行をくりかえすとする。そして最初の試行で表が出れば2円，2回目の試行で表が出れば 2^2 円すなわち4円というふうに，一般は n 回目に表が出れば 2^n 円の金がもらえるものと仮定する。この賭けにかりに参加料がとられるものとして，いくらまでの参加料を払ってもこの賭けに参加することが有利で，いくら以上の参加料ならもう参加するのが不利になるか，という問題が課されたとしよう。数学的期望値の比較によって解決するというのがベルヌーイ以前の問題解決の一般的な方法であった。つまりこの賭けの数学的期望値を計算し，それ以下の金額が参加料ならこの賭けに参加するのが有利であり，もしそれ以上の参加料を払わねばならないとすれば賭けに参加しない方が有利である，というのがこの考え方である。さてこのゲームの数学的期望値は簡単に求められる。それは

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n)\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

となって無限の値である。しかしわれわれの常識からすれば，いくら高価な参加料を払ってもこのゲームに参加するのが有利であるとはとても考えられない。一見簡単なゲームであるが，試行の回数が無限に大きくなり得ると，数学的期望値が無限に大きくなり，したがってこのゲームが極めて有利であるように見えて来るのである。このパラドックスをどう解決するかは17世紀の確率論の重要な問題の一つであった。

この問題解決のためにベルヌーイが考え出したのが道徳的期望値の概念である。彼は貨幣の限界効用は貨幣の量が増加するにしたがって逓減すると見，道徳的期望値は数学的期望値そのものに比例するのでなく，それの対数に比例すると考えた。この考え方からすれば，ゲームの数学的期望値は無限であっても，その道徳的期望値は有限である。言葉を換えていえば，ベルヌーイは貨幣額そ

のものを考えるのでなく，貨幣の効用の数学的期望値（平均）を考えたのであり，彼のいわゆる道徳的期望値とは，この効用の数学的期望値にほかならない。ただベルヌーイの道徳的期望値の概念は，当然のことではあるが，極めて素朴であり，効用は客観的で可測的であるという見方を暗黙のうちに含んでいる。この素朴なベルヌーイの効用理論に一そう彫琢を加え，近代的ないわゆるベルヌーイ効用指標（Bernoulli utility indicator）にまで鍛え上げたのはラムジーに始まる一連の学者の業績である[1]。

1.3. 道徳的期望値——効用の数学的期望値

近代的な効用指標の理論に入るまえにもう少しベルヌーイの考え方に説明を与えておこう。ベルヌーイの選択の基準は要約すれば次のごとくである。

《それぞれの所得水準に対して個人は効用の高さをきめる。効用の高さというのは，ここでは，それぞれの所得からその個人が引き出す満足を示す数である。さて，いま異る確率分布（賭けはその一例）の間で選択を行おうとするなら，そのそれぞれの確率分布に対して効用の期望値（平均）を算出する。さて，確率分布の間の選択にあたっては，この効用の期望値の高いものから採る。》

このベルヌーイの基準をよりよく理解出来るように一二の例を挙げる。

いまあるひとが1万円の富を持っているとしよう。このひとが銅貨投げの賭けに誘われたとする。賭けそのものは公正で，表が出れば1,000円を得，裏が出れば1,000円を失う。表の出る確率も，裏の出る確率も，ともに2分の1である。いま記号的に，彼の富をxであらわし，彼の効用をuとあらわせば，彼の効用函数は$u(x)$と示せるであろう。もし彼が賭けに参加すれば，その道徳的期望値（すなわち効用の数学的期望値）は$(1/2)u(11,000)+(1/2)u(9,000)$であり，もし彼が賭けに参加せぬとしたならその道徳的期望値は$u(10,000)$である。したがって，もし

1) F. P. Ramsey, *Truth and Probability, The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays*, London, 1931; J. Marshack, "Rational Behavior, Uncertain Prospects and Measurable Utility", *Economica*, April 1950.

$$\frac{1}{2}u(11{,}000)+\frac{1}{2}u(9{,}000)>u(10{,}000)$$

であれば，賭けに参加するわけである。いまこの両辺に2を掛け，さらに両辺から $u(10{,}000)+u(9{,}000)$ を差引けば，この条件は，

$$u(11{,}000)-u(10{,}000)>u(10{,}000)-u(9{,}000)$$

と書くことが出来る。もしベルヌーイが考えたように，限界効用が逓減的であれば，この条件は充されず，賭けに参加しないという結論になるわけである。

原理的にはまったく同じであるが，次に海上保険の場合を考えよう。100万円の積荷を商船で送るとして，船の沈む確率が，過去の経験に徹して10分の1であるとする。保険料は5万円であるとしよう。保険に掛けた場合，船が沈んでも沈まなくとも荷物代金の損害はない。保険料5万円の支出があるのみである。保険に掛けない場合，船が沈まねば1円の失費もないが，もし船が沈めば1000万円の損失であるベルヌーイの基準によれば，もし

$$u(-50{,}000)>\frac{1}{10}u(-1{,}000{,}000)+\frac{9}{10}u(0)$$

であれば保険に加入する方が有利なわけである。

記号を利用して効用の期望値すなわち道徳的期望値を表式化しておこう。起り得べき現象が x_1, x_2, …, x_n というふうに n 個あり，そのそれぞれの起る確率が p_1, p_2, …, p_n であるとすれば，効用の期望値 $E[u(x)]$ は

$$E[u(x)]=\sum_{i=1}^{n}p_iu(x_i)$$

と定義される。

1.4.　比較可能の仮定と推移律の仮定

すでに述べたところからも明かなように，いまさしあたりわれわれが当面している問題は，異る確率分布の間の比較である。記号の便宜上 p, q, r などの小文字で異る確率分布をあらわすことにしよう。

さてまず第一に，異る確率分布は比較可能であるという仮定を立てておこう。

いまpとqという二つの確率分布があるとすると，pの方がqよりもよいと思うか，qの方がpよりもよいと思うか，あるいはpもqもどちらも同じ程度に思うか，いずれかに区別出来るというのがこの仮定の意味である。記号的にはpがqよりよいとき$p>q$，qがpよりよいとき$q<p$，pとqと同じ程度のとき$p\sim q$と書く。pがqと同量もしくはそれ以上の場合には$p\gtrsim q$と書くことにする。 比較可能の仮定 (assumption of comparability or connexity) は，

《確率分布pとqとの間には，$p>q$か$q>p$か，あるいは$p\sim q$のいずれかの関係がある》という形で要約される。

次に，比較にあたって矛盾は存しないという仮定をおくことにする。かりに無矛盾の仮定 (assumption of consistency) と呼んでおこう。もし$p>q$でかつ$q>r$であれば，$p>r$である。同様に，もし$p>q$でかつ$q\sim r$なら$p>r$である。要するに

《もし$p\gtrsim q$でかつ$q\gtrsim r$であれば$p\gtrsim r$である》

というのが無矛盾の仮定である。

念のために一言しておくと，この比較可能の仮定と無矛盾の仮定は必ずしも確率分布の場合にのみおくのではない。通常の財の購入の場合にもおかれる仮定であり，確率分布の場合はこれの拡張にほかならない。

1.5. 確率分布の結合

確率分布の結合 (mixture) に関する仮定を次に述べるわけであるが，まず例によってその内容を明かにしておき，ついで抽象的な言葉で仮定として述べるのが理解に便利であると思う。

ここでは典型的な賭博機械としてのスロット・マシーン (slot-machine) を念頭におこう。スロット・マシーンというのは一見パチンコに似たような機械であるが，パチンコの場合，試みる人の熟練や技倆に結果が依存するが，スロット・マシーンの場合にはまったくチャンスにのみ依存する。アメリカではネ

ヴァダ州だけが公然と賭博の許された州であり，ラスヴェガスやリノの町には軒を並べて賭博場がある。スロット・マシーンはそれら賭博場の種々な賭博のうち最も単純なものであり，賭けをするひとは，5セントもしくは10セントの硬貨を機械に入れ，引き手を片手でひく，機械の前から見える部分に種々の字や絵が書いてあり，引き手をひくと，その字や絵が回転する。それがどこで止るかに応じて賞金の額がきまっており，機械の下の方にあいた口から，賞金が銀貨やその他の硬貨で文字通りジャラジャラと出る仕掛けになっている。引き手の引き方の上手下手はこの場合問題ではない。まったく偶然が勝負を決定するわけである。

いまここにそのような仕組みのスロット・マシーンがあるとしよう。10円入れて機械を動かす。15分の1の確率で当りがあり100円出て来る。当りでないときには何も出て来ないから10円の損になる。この機械をかりに G_1 と呼ぼう。

$$G_1 \begin{cases} \dfrac{1}{15}\text{の確率で 100 円当る} \\ \dfrac{14}{15}\text{の確率で 10 円失う} \end{cases}$$

このスロット・マシーンの隣りに，もう一つのスロット・マシーン G_2 がある。G_2 は当りが200円で，当る確率は25分の1であるとしよう。

$$G_2 \begin{cases} \dfrac{1}{25}\text{の確率で 200 円当る} \\ \dfrac{24}{25}\text{の確率で 10 円を失う} \end{cases}$$

それぞれの機械 G_1 および G_2 について数学的期望値を計算することは容易である。G_1 の方は

$$100\text{円}\times\frac{1}{15}-10\text{円}\times\frac{14}{15}=-2\frac{2}{3}\text{円}$$

であり，G_2 の方は

$$200\text{円}\times\frac{1}{25}-10\text{円}\times\frac{24}{25}=-1\frac{3}{5}\text{円}$$

である。いまこの G_1 および G_2 のいずれの機械を選ぶかは骰子を投げて決定す

るとしよう。偶数の目が出れば G_1，奇数の目が出れば G_2 にすることにすれば，G_1 をとるか G_2 をとるかはそれぞれ2分の1の確率である。G_1 なら G_1 だけ，G_2 なら G_2 だけというのでなく，G_1 と G_2 とあわせてしかもそのいずれをとるかを骰子の目で決めるのは一種の複合ゲームとみることが出来る。この複合ゲームをGとするとGは

$$G\begin{cases}\dfrac{1}{50}\text{の確率で 200 円を得る}\\ \dfrac{1}{30}\text{の確率で 100 円を得る}\\ \dfrac{71}{75}\text{の確率で 10 円を失う}\end{cases}$$

となる。Gの数学的期望値は

$$200\text{円}\times\frac{1}{50}+100\text{円}\times\frac{1}{30}-10\text{円}\times\frac{71}{75}=-\frac{32}{15}\text{円}$$

となる。いうまでもなく，これは G_1 の数学的期望値 $-\frac{8}{3}$円と，G_2 の数学的期望値 $-\frac{8}{5}$円とにそれぞれの機械を使用する確率2分の1をウエイトにした加重平均

$$-\frac{8}{3}\text{円}\times\frac{2}{1}-\frac{8}{5}\text{円}\times\frac{1}{2}=-\frac{32}{15}\text{円}$$

に等しくなる。

もう一つ例をあげておこう。「宝くじ」も一つの確率分布である。いまAグループ・Bグループという二種の「宝くじ」があるとしよう。いずれも1枚100円であるがAグループは1,000本に1本の割合で5万円あたり，Bグループは2,500本に1本の割合で10万円あたる。Aグループの「宝くじ」を買うことは−49円90銭の期望値をもつ確率分布を手に入れることであるし，Bグループの「宝くじ」を買えば，およそ−60円の期望値をもって確率分布を手に入れることになる。いまこの2つの確率分布のあいだの選択を，たとえばある確率に依存する方法できめたとすれば，それはこの2つの確率分布の結合を行ったことになる。

これらの例を整理して概念を明確にするために，簡単な記号を利用してまと

めておこう。いまpおよびqで与えられた2つの確率分布をあらわすことにしよう。前の例でいえば，pおよびqが2つの賭博機械にあたるし，また2種類の「宝くじ」に当るわけである。さてpとqを結合するにあたって，pを選ぶ確率がαであるとすれば，当然にqを選ぶ確率は$1-\alpha$である。pとqとの結合された新しい確率分布をrとすると，

$$r=\alpha p+(1-\alpha)q$$

とあらわされるわけである。

確率の結合が可能なのは，なにも必ずしも2組みの確率分布の間のみではない。3組み以上の場合にも可能である。いまp_1からp_nまでn組みの確率分布があり，それをα_1からα_nまでのそれぞれの確率で組合せて新しい確率分布が出来るとしよう。α_1からα_nまでの総和が1になることは確率の性質からして当然である。この場合

$$r=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_np_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ip_i$$

となることはいうまでもない[2)]。

1.6.　確率分布の結合に関する仮設

確率分布の結合に関する仮説を2つあげておこう。第一に，

《p_1，q_1，p_2およびq_2はそれぞれ確率分布であり，$p_1\gtrsim p_2$，$q_1\gtrsim q_2$，$0\leq\alpha\leq 1$であるとすれば，$\alpha p_1+(1-\alpha)q_1\gtrsim\alpha p_2+(1-\alpha)q_2$である。》

第二に，

《上のような場合に，とくに$p_1>p_2$でかつ$\alpha>0$であれば，$\alpha p_1+(1-\alpha)q_1>\alpha p_2+(1-\alpha)q_2$である。》

この2つの仮定の意味を理解しよくするため，これをいささか異った表現で言いかえてみよう。いま歪みのある銅貨があり，その表の出る確率がα，したがって裏が出る確率が$1-\alpha$であるとしよう。さてこの銅貨の表が出ればp_1，

2) L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*. 1954. p. 71.

裏が出れば q_1 を選ぶような性質の組合せがあり，同時に，もし銅貨の表が出れば p_2，裏が出れば q_2 を選ぶような組合せがあるとする。p_1 は p_2 に勝るとも劣らぬ程度によく，q_1 も q_2 に勝るとも劣らぬ程度に良いとしよう。このような状況のもとでは p_1 と q_1 との結合の方は，p_2 と q_2 との結合に比して，勝るとも劣らぬ程度によいのは当然である。このような状況では銅貨の表が出るか裏が出るかに関係なく，p_1 と q_1 の結合を選ぶのが賢明な策となる。サヴェジ (L. J. Savage) が the Sure-thing Principle とよんだのはこれである。念のためにサヴェジのあげた例を紹介しておこう。あるビジネスマンが不動産を買おうとしている。この際，そのビジネスマンは翌年に行われる予定の大統領選挙を念頭において考える。共和党の大統領候補が当選したとしたらこの不動産を買うかどうかを考え，彼は共和党の勝った場合に行われるだろうと思う諸政策を検討して，結局この不動産を買うのが有利であるという結論に到達したとしよう。次に民主党がこの選挙に勝つ可能性を考え，もし民主党が勝ったとしてこの不動産を買うのが有利かどうかを考える。やはり不動産を買うのが有利だという結論に到達したとしよう。民主党が勝っても，共和党が勝っても，不動産をいま買っておくことは彼にとって有利なわけである，さて大統領候補が民主党と共和党からしか出ていないとすれば，選挙の見とおし如何にかかわらずこの不動産を買うのが彼には有利であり，したがって彼はこれを買うべしという結論になる。サヴェジはこのような事態を the Sure-thing Principle とよぶのである。いうまでもなく通常われわれがしばしば当面し，またしたがってわれわれの関心をひくのは，たとえば共和党が勝てば買うのが有利であるが，民主党が勝てば買わぬ方が有利であり，共和党が勝つか民主党が勝つか逆睹しがたいという事態である。

仮定の第一と第二との相違は容易に知り得ると思う。仮定の第一においては，p_1 が p_2 に勝るとも劣らぬと仮定されていたのに対し，仮定の第二においては p_1 が p_2 に勝ると仮定されていた。さらに仮定の第二においては $\alpha>0$ と考えられている。第一の相違点についてはすでに明らかであろう。第二の相違点す

なわち $\alpha>0$ についてはいささか立入った説明を必要とする，この点の意味は次の節で連続性に関する仮定を論ずるが，それによって明らかになると思う。

1.7. 連続性に関する仮定

次に連続性の仮定を説明しようと思うが，その前にいささか技巧的ではあるが便利な表現法を定めておこう。いま p と r という二つの異なる確率分布があるとしよう。そのとき

$$p=1\times p+(1-1)r$$

と書くことができる。いうまでもなく，$1-1$ は 0 であり，この右辺と左辺は等しくなる。つまり p は p および r を $\alpha=1$ として結合したと考えるわけである，したがって確率分布 p が q より勝る $(p>q)$ ときには，

$$1\times p+(1-1)r>q$$

と書いてもよいわけである。

同様に

$$0\times p+(1-0)r=r$$

という表現も可能であり，もし $q>r$ であれば

$$q>0\times p+(1-0)r$$

と書いてもよいわけである。

これだけの表現技巧を前提して連続性に関する仮定に論及することにしよう。

《もし $p\geq q\leq r$ であれば，$0\leq\alpha\leq1$ であるようなある α をうまく選べば $\alpha p+(1-\alpha)r\sim q$ と書くことが出来る。》

要するに α の選び方（つまり結合の仕方）如何によっては，p と r とを適当に結合してと同値の確率分布を得ることが出来る，という仮定である。

1.8. 確率分布の結合もまた確率分布である

「確率分布の結合もまた確率分布である」という命題は極めて簡単に証明できるが念のために次に説明しておこう。いうまでもなく確率分布が確率分布であるために充さねばならない性質がある。それを列記すれば

i) 確率は0と1の間の値（0及び1を含む）をとる。

ii) 確率の和は1となる。

iii) 確率は少なくとも右側から連続である。

いままで本稿において p，q，r などが確率分布であるというとき，それはこれらが上の諸性質を充していると仮定していたのである。

さていまわれわれの当面する問題は p および q が確率分布であるとして，$\alpha p+(1-\alpha)q$ が確率分布であるかどうかという問題である。ここで $0\geqq\alpha\geqq1$ であることはいうまでもない。

第一に，$0\leqq p\leqq1, 0\leqq q\leqq1$ および $0\leqq\alpha\leqq1$ の諸性質から $0\leqq\alpha p+(1-\alpha)q\leqq1$ になること，したがって上記の i）の性質を充すことは直ちにわかる。第二に

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha p_i+(1-\alpha)q_i]=\sum_{i=1}^{n}\alpha p_i+\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)q_i$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}p_i+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}q_i=\alpha+1-\alpha=1$$

であるから，ii) の性質も充すわけである。ここで $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ および $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ の性質は p および q がそれぞれ確率分布であることから来ている。最後に前節(1.7) より明らかなように，$\alpha p+(1-\alpha)q$ は連続であり，したがって iii) の性質，すなわち右よりの連続性を充している。

1.9. 効用指標の定義

いままで個人の選好について若干論及した。これから論じようとするのは，その選好を何らかの指数で現わそうとする試みについてである。効用指標(utility indicator) とここで呼ぶのは，そのような選好の指数に外ならない。まず定義をあたえておこう。

〔定義〕 もし $p>q$ のときに，$u(p)>u(q)$ となり，$p>q$ でないときには，

$u(p)>u(q)$ とならないようなuがあれば，それを効用指標という。

経済学の発達過程において効用の概念がしばしば重要な役割を演じた。1870年代期せずして，オーストリヤのカール・メンガー (Carl Menger)，スイスのレオン・ワルラス (Léon Walras)，イギリスのウィリアム・スタンレー・ジェヴォンス (William Stanley Jevons) の３人によって，それぞれ独立に発展せしめられた限界効用学説において，効用の可測性 (the measurability of utility) が仮定されており，それをめぐって多くの論争が展開されたことはよく知られている[3]。現在，効用は可測的でない，つまり効用は序数的 (ordinal) ではあるが基数的 (cardinal) ではない，というのが通説である。従来の効用分析に変って，無差別図表 (indifference map) や限界代用率 (marginal rate of substitution)の概念が利用されるにいたったのはこれに基くのである[4]。確率概念を導入することによって，効用に基数的な性格の指数を与えようとしたのはノイマン及びモルゲンシュテルンの創見である[5]。この点後に立入って説明するが，もしノイマン及びモルゲンシュテルンの効用指標によって効用の可測性が立証されたとみるのはいささか早断である。限界効用学派以来考えられていた効用概念とノイマン＝モルゲンシュテルン流の効用指標の間にはかなり重要な相違があり，またノイマン＝モルゲンシュテルンはある基準によって効用に可測性を与えることが不可能でないことを示しただけに過ぎないのである。

1.10.　ベルヌーイ効用指標の定義

効用指標の定義は前節で明らかにした。ベルヌーイ効用指標というのはある特定の性質をもった効用指標である。

いま $E_p[u(x)]$ で確率分布がpの場合の効用の期望値を現すことにしよう。

---

3) 例えば，D. H. Robertson, *Utility and All That*, London, 1952, p. 13 ff.，あるいは，P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Mass., 1948, p. 90 ff. を見よ。

4) その代表的なものとして，J. R. Hicks, *Value and Capital*, Oxford, 1939 だけを挙げておく。

5) J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2 nd ed., Princeton, 1947.

つぎに確率分布 p および q の結合を r，すなわち

$$r=\alpha p+(1-\alpha)q$$

とする。数学的期望値の性質から

$$E_r[u(x)]=\alpha E_p[u(x)]+(1-\alpha)E_q[u(x)]$$

の関係が成立する。$E_q[u(x)]$ および $E_r[u(x)]$ は上記の $E_p[u(x)]$ に準じて考えればよい。ベルヌーイ効用指標の理論においては

$$u[\alpha p+(1-\alpha)q]=\alpha u(p)+(1-\alpha)u(q),\quad 0\leq\alpha\leq 1,$$

という仮定がおかれる。いいかえれば効用の期望値は確率分布の効用であり，したがって $u(p)=E_p[u(x)]$ の関係が充されるわけである。そして要するに，この性質を充す効用指標がベルヌーイ効用指標とよばれるわけである。

1.11. ベルヌーイ効用指標の存在

前節に定義したようなベルヌーイ効用指標が存在するか，また存在するとしたらそれはどういう条件のもとにか，これがこの節における問題である。

いま p が π より好まれ，$u(\pi_0)=0$，$u(\pi_1)=1$ であるとしよう。このとき

π_0 は　$0\pi_1+(1-0)\pi_0=\pi_0$ と，

π_1 は　$1\pi_1+(1-1)\pi_0=\pi_1$

とそれぞれ無差別である。

つぎに

$$u(p)=\frac{1}{\alpha}\qquad(u(p)>1)$$

と定義し，p は π_1 より好まれ，q は π_0 と π_1 の間にあると考えよう。当然，

$$u(p)>u(q)$$

となる。

いまかりにベルヌーイの効用指標の考え方に矛盾する場合を考えてみればよ

い。そのため，p も q もいずれも π_1 より選好されると仮定し

$$u(p)=\frac{1}{\alpha}, \qquad u(q)=\frac{1}{\beta}$$

としてみる。この場合 π_1 は

$$\alpha p+(1-\alpha)\pi_0 \text{ と}$$
$$\beta q+(1-\beta)\pi$$

のいずれとも無差別になるはずである。いま p は q よりも選好されるとすれば，$\alpha\geqq\beta$ となり，あきらかに

$$\alpha p+(1-\alpha)\pi_0 \text{ は } \alpha q+(1-x)\pi_0 \text{ より選好され，}$$
$$\alpha q+(1-\alpha)\pi_0 \text{ は} \beta q+(1-\beta)\pi_0 \text{ より選好される}$$

という関係が成立つ。この二つの関係から

$$\alpha p+(1-\alpha)\pi_0 \text{ は } \beta q+(1-\beta\pi) \text{ より選好される}$$

という関係が成立つ。ここから，p は q より選好され，$\alpha\geqq\beta$ という仮定が

$$u(\pi_1)=u[\alpha p+(1-\alpha)\pi_0]=u[\beta q+(1-\beta)\pi_0]$$

に矛盾することがわかる。この結果から，つぎのような定理をまとめることができる。

定理１　いかなる区間 $\langle\pi_0,\ \pi_1\rangle$ についてもベルヌーイの効用指標は存在する。

ついでにつぎの定理をかかげておこう。

定理２　もし $\langle\pi_0,\ \pi_1\rangle$ という区間において $V(p)$ がベルヌーイの効用指標であるとすると，$u(p)=\alpha V(p)+b$，$\alpha>0$ であるような $u(p)$ もまたベルヌーイの効用指標である。

〔証明〕

$V(p)$ はベルヌーイの効用指数であるから，$V(p)>V(q)$ が成立つとき，

またそのときにのみ，pはqよりも選好される。さて，

$$
\begin{aligned}
&u[\alpha p+(1-\alpha)q] \\
&=\alpha V[\alpha p+(1-\alpha)q]+b \\
&=\alpha[\alpha V(p)-(1-\alpha)V(q)]+\alpha b+(1-\alpha)b \\
&=\alpha[\alpha V(p)+b]+(1-\alpha)[\alpha V(q)+b \\
&=\alpha u(p)+(1-\alpha)u(q)
\end{aligned}
$$

となり，

$$u(p)>u(q)$$

と関係が成立つとき，またそのときにのみ

$$V(p)>V(q)$$

の関係が成立つ。